COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

PROBLÈME

I

On pose, sous réserve de la convergence des intégrales :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \qquad \text{et} \qquad J(\beta, \gamma) = \int_0^1 x^{\beta-1} (1-x)^{\gamma-1}\, dx,$$

où α, β et γ sont des paramètres réels strictement positifs.

1° Montrer que ces intégrales convergent.

2° Démontrer, pour $\alpha > 1$, la relation : $I(\alpha) = (\alpha - 1)\, I(\alpha - 1)$.

En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $I(n)$.

3° Démontrer que l'on a :

$$J(\beta, \gamma) = J(\gamma, \beta) \qquad \text{et} \qquad J(\beta, \gamma) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2\beta-1} \varphi \cdot \cos^{2\gamma-1} \varphi \cdot d\varphi.$$

II

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs réelles, indépendantes et de densités de probabilité respectives :

$$f : \begin{cases} x \longrightarrow 0 & , \text{ si } x \leqslant 0 \\ x \longrightarrow \dfrac{1}{b} x^{2\beta-1} e^{-x^2} & , \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad , \quad g : \begin{cases} y \longrightarrow 0 & , \text{ si } y \leqslant 0 \\ y \longrightarrow \dfrac{1}{c} y^{2\gamma-1} e^{-y^2} & , \text{ si } y > 0 \end{cases}$$

où β et γ sont des paramètres réels strictement positifs et où b et c sont des constantes réelles.

Tournez la page S. V. P.

1° Calculer b en fonction de I (β) et c en fonction de I (γ).

2° Si H est la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, démontrer que, pour $z > 0$, on a :

$$H(z) = \frac{1}{4bc} J(\beta, \gamma) \int_0^{z^2} t^{\beta+\gamma-1} e^{-t} \, dt .$$

3° En déduire la relation : $I(\beta) . I(\gamma) = J(\beta, \gamma) . I(\beta + \gamma)$.

III

On utilisera les résultats précédents pour traiter les questions qui suivent.

1° Calculer $I\left(\frac{1}{2}\right)$, puis $I\left(n - \frac{1}{2}\right)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

2° Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} \varphi . \cos^{2q+1} \varphi . \, d\varphi$, où p et $q \in \mathbb{N}$.

3° Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^{2p} \varphi . d\varphi$, où $p \in \mathbb{N}$.

4° Calculer, pour $K \in \mathbb{N}^*$, le moment d'ordre K d'une variable aléatoire normale réduite.

IV

Soit $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires à valeurs réelles, indépendantes, de densités de probabilité respectives $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ et de fonctions de répartition respectives $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$

On pose f_n : $\begin{cases} t \longmapsto 0 & , \text{ si } t \leqslant 0 \\ t \longmapsto \frac{t^n}{n!} e^{-t} & , \text{ si } t > 0 \end{cases}$

1° Calculer l'espérance et la variance de T_n.

2° Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $S = T_0 + T_2$. Déterminer la densité de probabilité de S.

3° On désigne par $W = \text{Inf}(T_0, T_2)$ la variable aléatoire représentant la plus petite des deux valeurs que peuvent prendre T_0 et T_2. Déterminer la densité de probabilité de W.

4° On désigne par $[t]$ la partie entière d'un réel t et par $[T_1]$ la variable aléatoire qui prend la valeur $[t]$ lorsque T_1 prend la valeur t. Déterminer la loi de probabilité de $[T_1]$.

5° On pose $d(t) = t - [t]$ et on désigne par $d(T_1)$ la variable aléatoire qui prend la valeur $d(t)$ lorsque T_1 prend la valeur t. Déterminer la fonction de répartition de $d(T_1)$.

V

On pose, sous réserve de la convergence de l'intégrale :

$$K(n, p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1 + x^n} \, dx$$

où n et p sont deux entiers naturels.

1° Déterminer les valeurs de n et de p pour lesquelles $K(n, p)$ converge.

2° Démontrer, lorsque $K(n, p)$ converge, la relation :

$$K(n, p) = \frac{1}{n} J\left(\frac{p}{n}, 1 - \frac{p}{n}\right).$$

3° Calculer : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}$.

4° Déduire de ce qui précède : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3 (1 - x)}}$.

• • •

E.N.S. de LYON
Opt. Sc. Nat.-